

Exercice 7.8 Soient $F(x, y, z) = (xy, xz, x^2)$ et Σ la surface obtenue en faisant l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 \leq 1$ avec le plan $x + z = 1$.

Exercice 7.9 Soient $F(x, y, z) = (z, y, 0)$ et

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sin(3x + 2y), x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Exercice 7.10 * Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$,

$$F(x, y, z) = (0, f(x, y, z), 0)$$

et

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 < x, y, z < 1\}.$$

Vérifier le théorème de Stokes.

7.4 Corrigés

Exercice 7.1 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds$. On trouve que

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & z^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

et si $A = (0, 2\pi) \times (0, 1)$, alors

$$\Sigma = \{\sigma(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z) \text{ avec } (\theta, z) \in \overline{A}\}.$$

La normale est alors

$$\sigma_{\theta} \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -z \sin \theta & z \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z \cos \theta \\ z \sin \theta \\ -z \end{pmatrix}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-2z, 0, -z^2 \cos^2 \theta) \cdot (z \cos \theta, z \sin \theta, -z) dz d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 z^3 \cos^2 \theta dz d\theta = \pi \int_0^1 z^3 dz = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl$. On a

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

avec

$$\Gamma_1 = \{\sigma(\theta, 0) = (0, 0, 0)\}$$

$$\Gamma_2 = \{\sigma(2\pi, z) = (z, 0, z) : z : 0 \rightarrow 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{\sigma(\theta, 1) = (\cos \theta, \sin \theta, 1) : \theta : 2\pi \rightarrow 0\}$$

$$\Gamma_4 = \{\sigma(0, z) = (z, 0, z) : z : 1 \rightarrow 0\} = -\Gamma_2.$$

On voit alors que $\partial \Sigma = \Gamma_3$ qui est parcouru négativement. On obtient par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Sigma} F \cdot dl &= - \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta \sin \theta, 1, 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 7.2 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds$. On a que

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & z & x \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

et si $A = (0, 1) \times (0, 2\pi)$ alors

$$\Sigma = \{\sigma(r, \theta) = (r^2 \cos \theta, r^2 \sin \theta, r) : (r, \theta) \in \overline{A}\}.$$

La normale est donnée par

$$\sigma_r \wedge \sigma_{\theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2r \cos \theta & 2r \sin \theta & 1 \\ -r^2 \sin \theta & r^2 \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -r^2 \cos \theta \\ -r^2 \sin \theta \\ 2r^3 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-1, -1, -r^4 \cos^2 \theta) \cdot (-r^2 \cos \theta, -r^2 \sin \theta, 2r^3) dr d\theta \\ &= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^7 \cos^2 \theta dr d\theta = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl$. On obtient par ailleurs que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_1 = \{\sigma(r, 0) = (r^2, 0, r) : r : 0 \rightarrow 1\}$$

$$\Gamma_2 = \{\sigma(1, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1) : \theta : 0 \rightarrow 2\pi\}$$

$$\Gamma_3 = \{\sigma(r, 2\pi) = (r^2, 0, r) : r : 1 \rightarrow 0\} = -\Gamma_1$$

$$\Gamma_4 = \{\sigma(0, \theta) = (0, 0, 0) : \theta : 2\pi \rightarrow 0\}.$$

On déduit donc que $\partial\Sigma = \Gamma_2$ et qu'il est parcouru positivement. On obtient alors que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta \sin \theta, 1, \cos \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 7.3 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds$. Un calcul immédiat donne

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3x^2 y^2 \end{pmatrix}.$$

De plus si on pose $A = (0, 2\pi) \times (0, \pi/2)$ on a

$$\Sigma = \{\sigma(\theta, \varphi) = R(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi) \text{ où } (\theta, \varphi) \in \overline{A}\}.$$

On trouve

$$\sigma_{\theta} \wedge \sigma_{\varphi} = R^2 \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2 \cos \theta \sin^2 \varphi \\ -R^2 \sin \theta \sin^2 \varphi \\ -R^2 \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}$$

et on infère donc que

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds &= 3R^6 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^5 \varphi \cos \varphi d\theta d\varphi \\ &= \frac{R^6}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi R^6}{8}. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. On trouve alors que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_1 = \{\sigma(\theta, 0) = R(0, 0, 1) : \theta : 0 \rightarrow 2\pi\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \sigma(2\pi, \varphi) = R(\sin \varphi, 0, \cos \varphi) : \varphi : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \sigma\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = R(\cos \theta, \sin \theta, 0) : \theta : 2\pi \rightarrow 0 \right\}$$

$$\Gamma_4 = \{\sigma(0, \varphi) = R(\sin \varphi, 0, \cos \varphi) : \varphi : \frac{\pi}{2} \rightarrow 0\} = -\Gamma_2.$$

On conclut donc que $\partial\Sigma = \Gamma_3$ qui est parcouru négativement et ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= -\int_0^{2\pi} (R^5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta, 1, 0) \cdot (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0) d\theta \\ &= R^6 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^4 \theta d\theta = \frac{\pi R^6}{8}. \end{aligned}$$

Exercice 7.4 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds$. On voit tout d'abord que

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2y & xz & y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 0 \\ z+2 \end{pmatrix}.$$

En posant $A = (\frac{2}{3}, 2) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ on obtient

$$\Sigma = \left\{ \sigma(r, \theta) = \left(r \cos \theta, r \sin \theta, -\frac{3}{2}r + 3 \right) \text{ où } (r, \theta) \in \overline{A} \right\}.$$

On obtient

$$\sigma_r \wedge \sigma_{\theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & -\frac{3}{2} \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} r \cos \theta \\ \frac{3}{2} r \sin \theta \\ r \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds &= \int_{\frac{2}{3}}^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - r \cos \theta, 0, -\frac{3}{2}r + 5 \right) \cdot \left(\frac{3}{2} r \cos \theta, \frac{3}{2} r \sin \theta, r \right) dr d\theta \\ &= \int_{\frac{2}{3}}^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} r \cos \theta - \frac{3}{2} r^2 \cos^2 \theta - \frac{3}{2} r^2 + 5r \right) d\theta dr = \frac{16}{3} + \frac{28\pi}{9}. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. Noter que $\partial\Sigma = \sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ et

$$\Gamma_1 = \left\{ \sigma\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, -r, -\frac{3}{2}r + 3 \right) : r : \frac{2}{3} \rightarrow 2 \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \sigma(2, \theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0) : \theta : -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \sigma\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \left(0, r, -\frac{3}{2}r + 3\right) : r : 2 \rightarrow \frac{2}{3} \right\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{ \sigma\left(\frac{2}{3}, \theta\right) = \left(\frac{2}{3} \cos \theta, \frac{2}{3} \sin \theta, 2\right) : \theta : \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2} \right\}.$$

On a donc

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_{\frac{2}{3}}^2 (2r, 0, -r) \cdot \left(0, -1, -\frac{3}{2}\right) dr = \frac{8}{3}$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-4 \sin \theta, 0, 2 \sin \theta) \cdot (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0) d\theta = 4\pi$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = -\int_{\frac{2}{3}}^2 (-2r, 0, r) \cdot \left(0, 1, -\frac{3}{2}\right) dr = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_4} F \cdot dl &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{4}{3} \sin \theta, \frac{4}{3} \cos \theta, \frac{2}{3} \sin \theta\right) \cdot \left(-\frac{2}{3} \sin \theta, \frac{2}{3} \cos \theta, 0\right) d\theta \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{8}{9} \sin^2 \theta + \frac{8}{9} \cos^2 \theta\right) d\theta = -\frac{8}{9} \pi. \end{aligned}$$

Par conséquent on a bien obtenu

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl = \frac{16}{3} + \frac{28\pi}{9}.$$

Exercice 7.5 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds$. On passe en coordonnées sphériques et on écrit pour $A = (0, \frac{\pi}{2}) \times (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$

$$\Sigma = \left\{ \sigma(\theta, \varphi) = (2 \cos \theta \sin \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \varphi) \text{ avec } (\theta, \varphi) \in \overline{A} \right\}.$$

On trouve

$$\sigma_{\theta} \wedge \sigma_{\varphi} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 \sin \theta \sin \varphi & 2 \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ 2 \cos \theta \cos \varphi & 2 \sin \theta \cos \varphi & -2 \sin \varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cos \theta \sin^2 \varphi \\ -4 \sin \theta \sin^2 \varphi \\ -4 \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & z^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

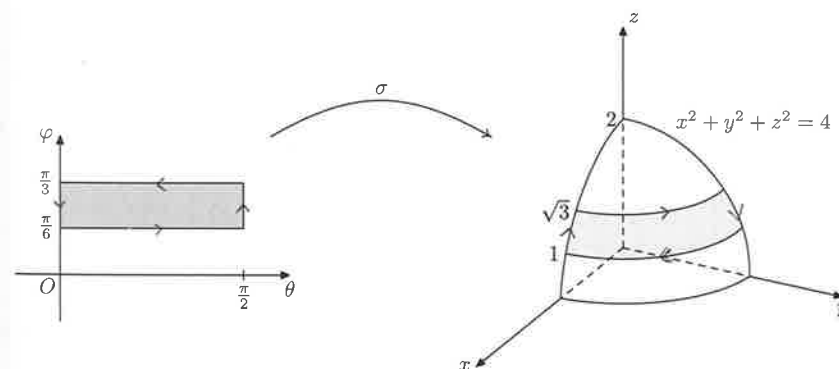
on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F \cdot \sigma_{\theta} \wedge \sigma_{\varphi} &= (-4 \cos \varphi, 0, 0) \cdot (-4 \cos \theta \sin^2 \varphi, -4 \sin \theta \sin^2 \varphi, -4 \cos \varphi \sin \varphi) \\ &= 16 \cos \theta \cos \varphi \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

et donc

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds = 16 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cos \varphi \sin^2 \varphi d\theta d\varphi = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}.$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl$. On a que $\partial \Sigma = \sigma(\partial A) = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$, où



$$\Gamma_1 = \left\{ \sigma\left(\theta, \frac{\pi}{6}\right) = (\cos \theta, \sin \theta, \sqrt{3}) : \theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \sigma\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) = (0, 2 \sin \varphi, 2 \cos \varphi) : \varphi : \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \sigma\left(\theta, \frac{\pi}{3}\right) = (\sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta, 1) : \theta : \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \right\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{ \sigma(0, \varphi) = (2 \sin \varphi, 0, 2 \cos \varphi) : \varphi : \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{6} \right\}.$$

Un calcul immédiat conduit à

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, 3, 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos \theta d\theta = 3$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} F \cdot dl &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (0, 4 \cos^2 \varphi, 0) \cdot (0, 2 \cos \varphi, -2 \sin \varphi) d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 8 \cos^3 \varphi d\varphi = 3\sqrt{3} - \frac{11}{3} \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, 1, 0) \cdot (-\sqrt{3} \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta, 0) d\theta = -\sqrt{3}$$

$$\int_{\Gamma_4} F \cdot dl = - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (0, 4 \cos^2 \varphi, 0) \cdot (2 \cos \varphi, 0, -2 \sin \varphi) d\varphi = 0.$$

On a donc bien

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl = \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} F \cdot dl = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}.$$

Exercice 7.6 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds$. On trouve tout de suite que

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & y + z^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, on écrit

$$\Sigma = \{ \sigma(\theta, \varphi) = (2 \cos \theta \sin \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \varphi) : \\ 0 \leq \arccos \frac{z}{2} = \varphi \leq \arctg \frac{y}{x} = \theta \leq \frac{\pi}{2} \}.$$

On a donc ici

$$A = \{ (\theta, \varphi) : 0 < \varphi < \theta < \frac{\pi}{2} \}.$$

On obtient

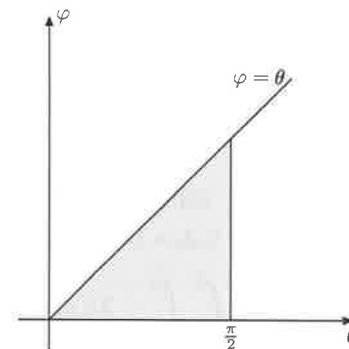
$$\sigma_{\theta} \wedge \sigma_{\varphi} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 \sin \theta \sin \varphi & 2 \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ 2 \cos \theta \cos \varphi & 2 \sin \theta \cos \varphi & -2 \sin \varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cos \theta \sin^2 \varphi \\ -4 \sin \theta \sin^2 \varphi \\ -4 \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}$$

et, par conséquent,

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds' \\ = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\theta} (1, 0, 0) \cdot (\cos \theta \sin^2 \varphi, \sin \theta \sin^2 \varphi, \cos \varphi \sin \varphi) d\theta d\varphi$$

à savoir

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{\theta} \sin^2 \varphi d\varphi \\ = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right] d\theta = \frac{8}{3} - \pi.$$



(ii) Calcul de $\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl$. On a que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

où

$$\Gamma_1 = \{ \sigma(\theta, 0) = (0, 0, 2) : \theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \}$$

$$\Gamma_2 = \{ \sigma\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) = (0, 2 \sin \varphi, 2 \cos \varphi) : \varphi : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \}$$

$$\Gamma_3 = \{ \sigma(\theta, \theta) = (2 \cos \theta \sin \theta, 2 \sin^2 \theta, 2 \cos \theta) : \theta : \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \}.$$

On trouve donc que $\partial \Sigma = \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et par conséquent

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, 0, 2 \sin \varphi + 4 \cos^2 \varphi) \cdot (0, 2 \cos \varphi, -2 \sin \varphi) d\varphi \\ = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin^2 \varphi + 8 \cos^2 \varphi \sin \varphi) d\varphi = - \left(\frac{8}{3} + \pi \right)$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, 0, 2 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta) \cdot (2 \cos(2\theta), 4 \sin \theta \cos \theta, -2 \sin \theta) d\theta \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin^3 \theta + 8 \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta = \frac{16}{3}.$$

On a bien obtenu le résultat souhaité

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl = \frac{8}{3} - \pi.$$

Exercice 7.7 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds$. On a

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}.$$

On trouve

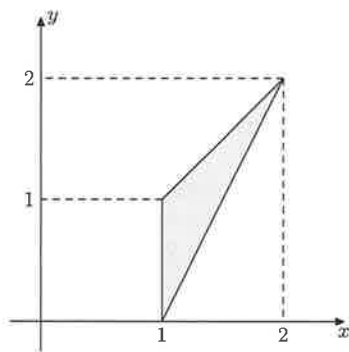
$$\Sigma = \{\sigma(x, y) = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \overline{A}\}$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (1, 2), 2x - 2 < y < x\}$$

$$\sigma_x \wedge \sigma_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds = \int_1^2 \int_{2x-2}^x 2x \, dy \, dx = \frac{4}{3}.$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. On trouve que $\partial\Sigma = \sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, où



$$\Gamma_1 = \{\sigma(x, 2x - 2) = (x, 2x - 2, 0) : x : 1 \rightarrow 2\}$$

$$\Gamma_2 = \{\sigma(x, x) = (x, x, 0) : x : 2 \rightarrow 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{\sigma(1, y) = (1, y, 0) : y : 1 \rightarrow 0\}.$$

Le calcul donne alors

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_1^2 (0, x^2, 0) \cdot (1, 2, 0) \, dx = \frac{14}{3}$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = - \int_1^2 (0, x^2, 0) \cdot (1, 1, 0) \, dx = -\frac{7}{3}$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = - \int_0^1 (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0) \, dy = -1.$$

Le résultat suit directement

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \frac{14}{3} - \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}.$$

Exercice 7.8 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds$. On trouve si $A = (0, 1) \times (0, 2\pi)$ que

$$\Sigma = \{\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1 - r \cos \theta) \text{ où } (r, \theta) \in \overline{A}\}.$$

$$\sigma_r \wedge \sigma_{\theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & -\cos \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & r \sin \theta \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & xz & x^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2x \\ z - x \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-r \cos \theta, -2r \cos \theta, 1 - 2r \cos \theta) \cdot (r, 0, r) \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-3r^2 \cos \theta + r) \, d\theta \, dr = \pi. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. On a

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

avec

$$\Gamma_1 = \{\sigma(r, 0) = (r, 0, 1 - r) : r : 0 \rightarrow 1\}$$

$$\Gamma_2 = \{\sigma(1, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1 - \cos \theta) : \theta : 0 \rightarrow 2\pi\}$$

$$\Gamma_3 = \{\sigma(r, 2\pi) = (r, 0, 1 - r) : r : 1 \rightarrow 0\} = -\Gamma_1$$

$$\Gamma_4 = \{\sigma(0, \theta) = (0, 0, 1)\}.$$

On a donc $\partial\Sigma = \Gamma_2$ qui est parcouru positivement et ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} (\cos \theta \sin \theta, \cos \theta (1 - \cos \theta), \cos^2 \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, \sin \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos \theta \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \cos^3 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta) \, d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Exercice 7.9 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds$. On trouve

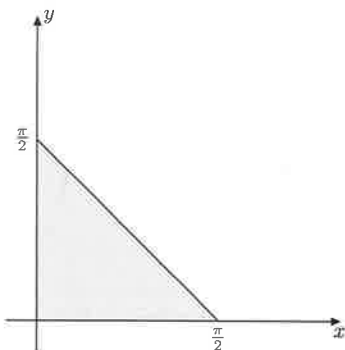
$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$\Sigma = \{\sigma(x, y) = (x, y, \sin(3x + 2y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \bar{A}\}$$

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, x + y < \frac{\pi}{2} \right\}$$

et on obtient



$$\sigma_x \wedge \sigma_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 3 \cos(3x + 2y) \\ 0 & 1 & 2 \cos(3x + 2y) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cos(3x + 2y) \\ -2 \cos(3x + 2y) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds \\ = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2-x} (0, 1, 0) \cdot (-3 \cos(3x + 2y), -2 \cos(3x + 2y), 1) dx dy \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds &= \int_0^{\pi/2} [-\sin(3x + 2y)]_0^{\pi/2-x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (\sin(3x) - \sin(x + \pi)) dx = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl$. On trouve que $\partial \Sigma = \sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, où

$$\Gamma_1 = \{\sigma(x, 0) = (x, 0, \sin(3x)) : x : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \sigma\left(x, \frac{\pi}{2} - x\right) = \left(x, \frac{\pi}{2} - x, \sin(x + \pi)\right) : x : \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \sigma(0, y) = (0, y, \sin(2y)) : y : \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \right\}.$$

Le calcul donne alors

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_0^{\pi/2} (\sin(3x), 0, 0) \cdot (1, 0, 3 \cos(3x)) dx = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} F \cdot dl &= - \int_0^{\pi/2} \left(-\sin x, \frac{\pi}{2} - x, 0 \right) \cdot (1, -1, -\cos x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin x dx + \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = 1 + \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = - \int_0^{\pi/2} (\sin(2y), y, 0) \cdot (0, 1, 2 \cos(2y)) dy = -\frac{\pi^2}{8}$$

et on peut donc conclure que

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl = \frac{4}{3}.$$

Exercice 7.10 * (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds$. On trouve

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -f_z \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs on a

$$\Sigma = \{\sigma(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z) : (\theta, z) \in A = (0, \pi/2) \times (0, 1)\}$$

$$\sigma_{\theta} \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} [(-f_z(\cos \theta, \sin \theta, z), 0, f_x(\cos \theta, \sin \theta, z)) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0)] d\theta dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{d}{dz} [f(\cos \theta, \sin \theta, z)] \cos \theta \right] d\theta dz \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds = \int_0^{\pi/2} [f(\cos \theta, \sin \theta, 0) - f(\cos \theta, \sin \theta, 1)] \cos \theta d\theta.$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. Observer que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(\theta) = \sigma(\theta, 0) = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \theta : 0 \rightarrow \pi/2\}$$

$$\Gamma_2 = \{\gamma_2(z) = \sigma(\pi/2, z) = (0, 1, z), z : 0 \rightarrow 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{\gamma_3(\theta) = \sigma(\theta, 1) = (\cos \theta, \sin \theta, 1), \theta : \pi/2 \rightarrow 0\}$$

$$\Gamma_4 = \{\gamma_4(z) = \sigma(0, z) = (1, 0, z), z : 1 \rightarrow 0\}.$$

Par conséquent

$$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

avec Γ_1 et Γ_2 parcourues positivement et Γ_3 et Γ_4 parcourues négativement. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} F \cdot dl &= \int_0^{\pi/2} [(0, f(\cos \theta, \sin \theta, 0), 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0)] d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} f(\cos \theta, \sin \theta, 0) \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \int_0^1 [(0, f(0, 1, z), 0) \cdot (0, 0, 1)] dz = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} F \cdot dl &= - \int_0^{\pi/2} [(0, f(\cos \theta, \sin \theta, 1), 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0)] d\theta \\ &= - \int_0^{\pi/2} f(\cos \theta, \sin \theta, 1) \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_4} F \cdot dl = - \int_0^1 [(0, f(1, 0, z), 0) \cdot (0, 0, 1)] dz = 0.$$

On a finalement

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \int_0^{\pi/2} [f(\cos \theta, \sin \theta, 0) - f(\cos \theta, \sin \theta, 1)] \cos \theta d\theta$$

ce qui est le résultat souhaité.

Chapitre 8

Appendice

8.1 Quelques notations et notions élémentaires de topologie

Notation Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, on note la boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon R et centrée en x par

$$B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < R\}$$

où, pour $z \in \mathbb{R}^n$, on a défini la norme euclidienne par

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 \right)^{1/2}.$$

Définition 8.1 Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On dit alors que

- (i) A est **ouvert** si $\forall x \in A, \exists \epsilon > 0$ tel que $B_\epsilon(x) \subset A$.
- (ii) On définit le **complémentaire** de A , noté A^c , comme

$$A^c = \mathbb{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\}.$$

- (iii) A est **fermé** si A^c est ouvert.

- (iv) On définit la **frontière** (ou **bord**) de A , noté ∂A , par

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset, B_\epsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset, \forall \epsilon > 0\}.$$

- (v) On note $\bar{A}$, l'**adhérence** (ou **fermeture**) de A , qui est, par définition, le plus petit fermé qui contienne A .

- (vi) On définit l'**intérieur** de A , qu'on note $\text{int } A$ (parfois aussi $\overset{\circ}{A}$), comme le plus grand ouvert contenu dans A .

Proposition 8.2 Pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ les résultats suivants ont lieu

$$\text{int } A \subset A \subset \bar{A} \quad \text{et} \quad \bar{A} = A \cup \partial A.$$